

Papierübung 1 - Musterlösung

1. Für einen Pflaumenkuchen werden $\frac{3}{8}$ kg Weizenmehl, $1\frac{1}{2}$ kg Pflaumen, $\frac{3}{20}$ kg Butter und $\frac{9}{40}$ kg Zucker benötigt. Ein Bäcker möchte 16 solcher Kuchen backen. Wie viel kg benötigt er von jeder Zutat? Geben Sie die Zahlen in vollständig gekürzten Brüchen an.

Lösung:

$$\text{Weizenmehl: } 16 \cdot \frac{3}{8} \text{ kg} = 2 \cdot 3 \text{ kg} = 6 \text{ kg}$$

$$\text{Pflaumen: } 16 \cdot 1\frac{1}{2} \text{ kg} = 16 \cdot \frac{3}{2} \text{ kg} = 8 \cdot 3 \text{ kg} = 24 \text{ kg}$$

$$\text{Butter: } 16 \cdot \frac{3}{20} \text{ kg} = 4 \cdot \frac{3}{5} \text{ kg} = \frac{12}{5} \text{ kg} = 2\frac{2}{5} \text{ kg}$$

$$\text{Zucker: } 16 \cdot \frac{9}{40} \text{ kg} = 2 \cdot \frac{9}{5} \text{ kg} = \frac{18}{5} \text{ kg} = 3\frac{3}{5} \text{ kg}$$

2. Setzen Sie die fehlenden Ziffern ein. In jedes Kästchen kommt nur eine Ziffer. Die fehlenden Brüche müssen in gekürzter Form angegeben werden.

$$\begin{array}{r} \frac{5}{12} \\ - \\ \frac{1}{6} \\ = \\ \frac{1}{4} \end{array} + \begin{array}{r} \frac{5}{8} \\ - \\ \frac{1}{9} \\ = \\ \frac{37}{72} \end{array} = \begin{array}{r} \frac{25}{24} \\ - \\ \frac{5}{18} \\ = \\ \frac{55}{72} \end{array}$$

3. Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie soweit wie möglich zusammen.

a. $(a - 4)(a + 5)$

b. $(11u + 6)(9 - 5v)$

c. $\left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y\right)\left(\frac{5}{4}x + \frac{3}{4}y\right)$

d. $(2a + 3b)(5a - 6b + 1)$

Lösung:

a. $(a - 4)(a + 5) = a^2 - 4a + 5a - 20 = a^2 + a - 20$

b. $(11u + 6)(9 - 5v) = 99u + 54 - 55uv - 30v$

c.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y\right)\left(\frac{5}{4}x + \frac{3}{4}y\right) &= \frac{5}{8}x^2 - \frac{15}{8}xy + \frac{3}{8}xy - \frac{9}{8}y^2 = \frac{5}{8}x^2 - \frac{12}{8}xy - \frac{9}{8}y^2 \\ &= \frac{5}{8}x^2 - \frac{3}{2}xy - \frac{9}{8}y^2 \end{aligned}$$

d.

$$\begin{aligned} (2a + 3b)(5a - 6b + 1) &= 10a^2 + 15ab - 12ab - 18b^2 + 2a + 3b \\ &= 10a^2 + 3ab - 18b^2 + 2a + 3b \end{aligned}$$

4. Schreiben Sie als Produkt.

- a. $3a + 3b + xa + xb$
- b. $5y - 2xy - 20 + 8x$
- c. $8r^2 - 6rs + 4rs - 3s^2$

Lösung:

Um die Summe als Produkt darzustellen, muss von jeweils zwei passenden Summanden ein gemeinsamer Faktor ausgeklammert werden. Ein zweites Ausklammern führt dann zum Endergebnis.

- a. $3a + 3b + xa + xb = 3(a + b) + x(a + b) = (3 + x)(a + b)$
- b. $5y - 2xy - 20 + 8x = y(5 - 2x) - 4(5 - 2x) = (y - 4)(5 - 2x)$
- c. $8r^2 - 6rs + 4rs - 3s^2 = 2r(4r - 3s) + s(4r - 3s) = (2r + s)(4r - 3s)$

5. Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach der Unbekannten auf.

- a. $21x + 17 = 2x + 72 + 8x$
- b. $3(7 - 2x) + 7x = 20$
- c. $4(y - 3) - 2y = 5(-3y + 1)$

Lösung:

- a. Im ersten Schritt werden die Faktoren sortiert. Alle Faktoren, die ein x enthalten, kommen auf die linke Seite, der Rest auf die rechte Seite. Nach der Zusammenfassung der Summanden wird durch den Vorfaktor der Variablen x dividiert-

$$\begin{aligned}21x + 17 &= 2x + 72 + 8x \\21x + 17 &= 10x + 72 \\21x - 10x &= 72 - 17 \\11x &= 55 \\x &= 5\end{aligned}$$

- b. Bevor bei der folgenden Gleichung muss zuerst die Klammer aufgelöst werden, bevor die einzelnen Summanden sortiert werden können.

$$\begin{aligned}3(7 - 2x) + 7x &= 20 \\21 - 6x + 7x &= 20 \\21 + x &= 20 \\x &= -1\end{aligned}$$

- c. Auch bei dieser Gleichung müssen im ersten Schritt die Klammern aufgelöst werden, bevor die Summanden sortiert und zusammengefasst werden.

$$\begin{aligned}
 4(y - 3) - 2y &= 5(-3y + 1) \\
 4y - 12 - 2y &= -15y + 5 \\
 2y - 12 &= -15y + 5 \\
 2y + 15y &= 5 + 12 \\
 17y &= 17 \\
 y &= 1
 \end{aligned}$$

6. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Bruchgleichungen

a. $\frac{5x+12}{6} - \frac{7x-9}{15} = 7$

b. $\frac{15}{x-3} = 4$

c. $\frac{z-7}{z+7} + \frac{z+10}{z-3} = 2$

Lösung:

- a. Bevor die Bruchgleichung gelöst werden kann, müssen im ersten Schritt die Brüche beseitigt werden. Dies gelingt durch Multiplikation beider Seiten der Gleichung mit einem gemeinsamen Nenner der Brüche. In diesem Fall eignet sich die Zahl 30. Anschließend kann die Gleichung wie gewohnt gelöst werden.

$$\begin{aligned}
 \frac{5x + 12}{6} - \frac{7x - 9}{15} &= 7 \quad | \cdot 30 \\
 30 \cdot \frac{5x + 12}{6} - 30 \cdot \frac{7x - 9}{15} &= 210 \\
 5(5x + 12) - 2(7x - 9) &= 210 \\
 25x + 60 - 14x + 18 &= 210 \\
 11x + 78 &= 210 \\
 11x &= 132 \\
 x &= 12
 \end{aligned}$$

- b. Auch in dieser Gleichung muss zuerst mit dem Nenner (x-3) multipliziert werden, damit die Gleichung nach x aufgelöst werden kann

$$\begin{aligned}
 \frac{15}{x-3} &= 4 \quad | \cdot (x-3) \\
 \frac{15}{x-3} \cdot (x-3) &= 4 \cdot (x-3) \\
 15 &= 4x - 12 \\
 27 &= 4x \\
 x &= \frac{27}{4}
 \end{aligned}$$

- c. Im ersten Schritt wird die Gleichung mit $(z + 7)(z - 3)$ multipliziert. Anschließend werden die Klammern ausmultipliziert und die Faktoren sortiert.

$$\begin{aligned}\frac{z-7}{z+7} + \frac{z+10}{z-3} &= 2 \mid (z+7)(z-3) \\ \frac{z-7}{z+7} \cdot (z+7)(z-3) + \frac{z+10}{z-3} \cdot (z+7)(z-3) &= 2(z+7)(z-3) \\ (z-7)(z-3) + (z+10)(z+7) &= 2(z+7)(z-3) \\ z^2 - 7z - 3z + 21 + z^2 + 10z + 7z + 70 &= 2z^2 + 14z - 6z - 42 \\ 2z^2 + 7z + 91 &= 2z^2 + 4z - 21\end{aligned}$$

Da der störende Summand $2z^2$ auf beiden Seiten der Gleichung steht, kann dieser auf beiden Seiten subtrahiert werden und fällt somit weg.

$$\begin{aligned}7z + 91 &= 8z - 42 \\ -z &= -133 \\ z &= 133\end{aligned}$$